Der Gauß´sche Algorithmus

Ein Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen

Aufgabe:

Löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x - y + 2z &= 4 \\ 2x + 3y + 4z &= 14 \\ 3x + 2y - z &= 5 \end{aligned}$$

Lösung: x= y= z=

Vorüberlegungen

Welche Umformungen sind bei Gleichungssystemen erlaubt?

1. Man kann jede einzelne Gleichung mit einem Faktor ≠0 multiplizieren:

$$2x + y = 6 \quad | \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 4x + 2y = 12$$

Vorüberlegungen

2. Man kann eine Gleichung zu einer anderen addieren.

$$x+y=7$$
$$\wedge\ 2x-y=2$$
$$\Leftrightarrow\ 3x=9$$

Besonders klug ist dies, wenn dabei ein Variable wegfällt.

Vorüberlegungen

3.Man kann die Reihenfolge der Gleichungen beliebig ändern

$$\begin{aligned} -x - y + 2z &= 4 \\ 2x + 3y + 4z &= 14 \\ 3x + 2y - z &= 5 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 14 \\ -x - y + 2z &= 4 \\ 3x + 2y - z &= 5 \end{aligned}$$

Lösungsschema

1. Vereinfache die Aufgabe durch eine Kurzschreibweise :

$$\begin{aligned} -x - y + 2z &= 4 \\ 2x + 3y + 4z &= 14 \\ 3x + 2y - z &= 5 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 14 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Weg zur Lösung

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 14 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 14 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{array}$$

Unterhalb dieser Diagonalen
Müssen wir alles zu Null machen.

Weg zur Lösung

$$\left.\begin{array}{ccc} -1 & -1 & 2 \\ \color{red}{2} & 3 & 4 \\ \color{red}{3} & \color{red}{2} & -1 \end{array}\right| \begin{array}{c} 4 \\ 14 \\ 5 \end{array}$$

Ziel :
Schritt für Schritt
Die markiertene Zahlen
Zu Null machen.

Weg zur Lösung

$$\left.\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 4 \\ \color{red}{2} & 3 & 4 & 14 \\ \color{red}{3} & \color{red}{2} & -1 & 5 \end{array}\right.$$

Die erste 2 wegschaffen:
Multipliziere die erste Gleichung mit 2,
Addiere die erste zur zweiten Gleichung

Weg zur Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 8 & 22 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Weg zur Lösung

$$\left.\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 8 & 22 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right.$$

Wie schaffen wir diese 3 weg?

Weg zur Lösung

$$\left.\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 8 & 22 \\ \color{red}{3} & \color{red}{2} & -1 & 5 \end{array}\right.$$

Erste Gleichung *3
Dann diese Gleichung zur dritten addieren.

Weg zur Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & 8 & 22 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

Weg zur Lösung

$$\left.\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & 8 & 22 \\ 0 & -1 & 5 & 17 \end{array}\right.$$

Nun ist es leicht:
2.Gleichung zur dritten addieren.

Weg zur Lösung

$$\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & 8 & 22 \\ 0 & 0 & 13 & 39 \end{array}$$

Dreiecksform ist erreicht!

Weg zur Lösung

$$\left.\begin{array}{ccc} -3 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 13 \end{array}\right| \begin{array}{c} 12 \\ 22 \\ 39 \end{array}$$

Nun von unten nach oben auflösen!

$13z = 39$

$\Leftrightarrow z=3$

Weg zur Lösung

$$\left.\begin{array}{ccc} -3 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 13 \end{array}\right| \begin{array}{c} 12 \\ 22 \\ 39 \end{array}$$

$y+8z = 22 \quad \wedge\ z=3$

$\Leftrightarrow\ y+24 = 22$

$\Leftrightarrow\ y= -2$

Weg zur Lösung

$$\left.\begin{array}{ccc} -3 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 13 \end{array}\right| \begin{array}{c} 12 \\ 22 \\ 39 \end{array}$$

$y = -2 \wedge z = 3$

Man kann noch die erste Gleichung vereinfachen:
Durch -3 teilen!

Weg zur Lösung

$$\left.\begin{matrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 13 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} -4 \\ 22 \\ 39 \end{matrix}$$

$\boxed{y = -2 \wedge z = 3}$

Weg zur Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 8 & 22 \\ 0 & 0 & 13 & 39 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} & y=-2 \wedge z=3 \\ & x+y-2z=-4 \\ \Leftrightarrow\ & x-2-6=-4 \\ \Leftrightarrow\ & x=4 \end{aligned}}$$

Weg zur Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 8 & 22 \\ 0 & 0 & 13 & 39 \end{array}\right)$$

$$\boxed{x=4 \wedge y=-2 \wedge z=3}$$

Aufgabe:

Löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x -y +2z &= 4 \\ 2x +3y +4z &= 14 \\ 3x +2y -z &= 5 \end{aligned}$$

Lösung:

$$\boxed{x=4 \wedge y=-2 \wedge z=3}$$